

RELATÓRIO FINAL- IFSP

MÓDULO DE PROGRAMA PARA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS LINEARES PLANAS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nome do Bolsista: Isabela Cassia Dominical Parra. (17) 99626-1381.

isabelacassia19@gmail.com

Vigência da Bolsa: 01/03/2018 a 30/11/2018

Instituição de vínculo da bolsa:

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo-IFSP

Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé – São Paulo-SP

CEP: 01109-010

Telefone: 11-3775-4570

e-mail: prp@ifsp.edu.br

Nome do Orientador: Gustavo CabrelliNirschl. (17) 99153-2885.

nirschl@gmail.com

RESUMO

A maioria dos softwares de cálculo da área de Engenharia Civil não apresenta todos os passos de resolução. Diferenciando-se destes, o grupo de pesquisa do qual os autores fazem parte desenvolve programas que detalham os cálculos e descrevem de forma breve a teoria envolvida, tendo como finalidade ajudar alunos, professores e profissionais da área. O programa aqui apresentado é um novo módulo do programa IFESTRUT, já disponível on-line, para análise de estruturas lineares sem rótulas pelo Método de Elementos Finitos (MEF).

APRESENTAÇÃO (INTRODUÇÃO, JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS)

Muitos cálculos da área de Engenharia Civil são extensos e precisam de auxílio de softwares para serem resolvidos. No entanto, estes muitas vezes não apresentam todos os passos de resolução, dificultando para alguns usuários. Com a finalidade de ajudar alunos, professores e profissionais da área, desenvolveram-se programas que detalham os cálculos e descrevem de forma breve a teoria envolvida. Neste relatório, será apresentado um novo módulo do programa IFESTRUT, para análise de estruturas lineares sem rótulas pelo Método de Elementos Finitos (MEF).

A ideia nasceu de um grupo de pesquisa cadastrado no CNPq, o NEVE (Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental), que tenta desenvolver programas voltados para a Engenharia Civil com o intuito principal de apresentar a resolução e considerações de cálculo feitas pelo programa.

O objetivo deste trabalho é mostrar a teoria de análise estrutural de estruturas lineares planas e sem rótulas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) por meio de exemplos e explicações detalhadas. Neste contexto, foi adicionado ao IFESTRUT, software já existente, um módulo para a análise estrutural pelo MEF.

Como resultado, o programa realiza todos os cálculos via Elementos Finitos unidimensional reto e plano e apresenta os valores nodais de deslocamento, giro, esforço normal, cortante e momento fletor. As explicações da teoria envolvida no método e os cálculos são detalhadas no relatório em PDF com a intenção de que alunos, profissionais e professores possam utilizar como estudo e como elemento auxiliar na metodologia de ensino.

O método de cálculo será o proposto por Assan (2003) para cálculos de estruturas via Elementos Finitos unidimensionais retos e planos.

DESENVOLVIMENTO (METODOLOGIA E ANÁLISE)

Segundo Assan (2003), o Método dos elementos finitos mais usual é o baseado no Método de Rayleigh-Ritz e prevê a divisão do domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas Elementos Finitos. E isto pode ser feito para elementos lineares, de lâmina e

tridimensionais. O programa aqui apresentado somente irá tratar de elementos lineares como o exemplo da Figura 1 a seguir:

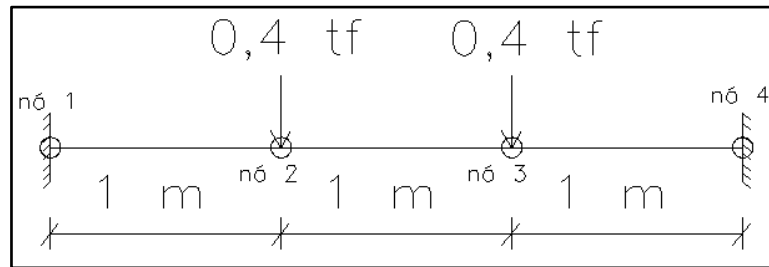


Figura 1: Exemplo de estrutura linear.

Para a resolução, é preciso montar a matriz de rigidez e o vetor de cargas distribuídas dos elementos, como mostrada na Figura 2 abaixo:

MATRIZ DE RIGIDEZ						VETOR DE CARGAS DISTRIBUÍDAS	
$k = \begin{bmatrix} \frac{E * A}{l} & 0 & 0 & -\frac{E * A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 * E * I}{l^3} & \frac{6 * E * I}{l^2} & 0 & -\frac{12 * E * I}{l^3} & \frac{6 * E * I}{l^2} \\ 0 & \frac{6 * E * I}{l^2} & \frac{4 * E * I}{l} & 0 & -\frac{6 * E * I}{l^2} & \frac{2 * E * I}{l} \\ -\frac{E * A}{l} & 0 & 0 & \frac{E * A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 * E * I}{l^3} & -\frac{6 * E * I}{l^2} & 0 & \frac{12 * E * I}{l^3} & -\frac{6 * E * I}{l^2} \\ 0 & \frac{6 * E * I}{l^2} & \frac{2 * E * I}{l} & 0 & -\frac{6 * E * I}{l^2} & \frac{4 * E * I}{l} \end{bmatrix}$						$rd = \begin{bmatrix} \frac{qx * l}{2} \\ \frac{qy * l}{2} \\ \frac{qy * l^2}{12} \\ \frac{12}{qx * l} \\ \frac{2}{qy * l} \\ \frac{2}{-qy * l^2} \\ \frac{12}{12} \end{bmatrix}$	

Figura 2: Matriz de Rigidez e Vetor de cargas distribuídas genéricos para um elemento. Fonte: Elaborado pelo autor.

Posteriormente se devem juntá-los em um sistema linear global a fim de obter, de início, os deslocamentos nodais. Com os resultados das barras referentes aos eixos globais é necessário que os voltem aos eixo locais das barras e assim se obtenham os demais esforços: normal (N), cortante (V) e momento fletor (M). Abaixo, na Figura 3, é apresentada a equação para obter os esforços nodais dos nós “i” e “j” de cada elemento finito:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} = k * \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} - rd$$

Figura 3: Equação genérica para obtenção dos esforços nos nós das barras. Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

CONCLUSÃO (RESULTADOS DA PESQUISA)

Como resultado obtido têm-se o módulo de Métodos Elementos Finitos (MEF), que foi introduzido no IFESTRUT, programa que já disponível *on-line*, (<http://vtp.ifsp.edu.br/nev/lfestrut/lfestrut.php?#>). Segue, na Figura 4, sua interface:

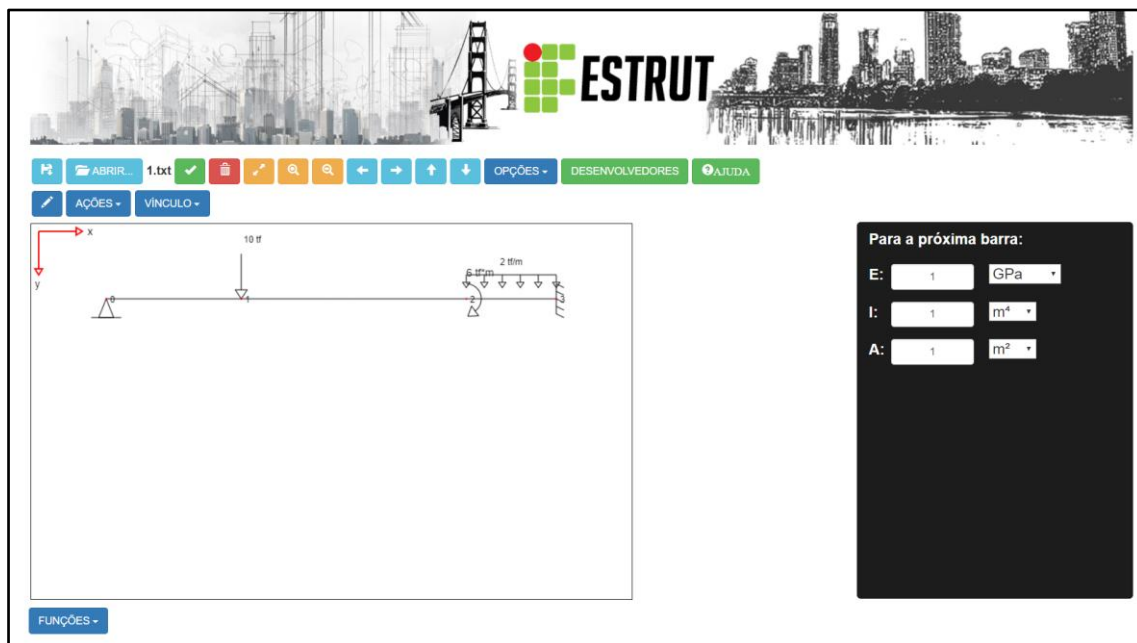


Figura 4: Exemplo de uma viga desenhada no IFESTRUT. Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que os cálculos sejam efetuados, basta clicar no botão “FUNÇÕES” e escolher a opção “MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS”. Segue, na Figura 5, uma das telas com os resultados:

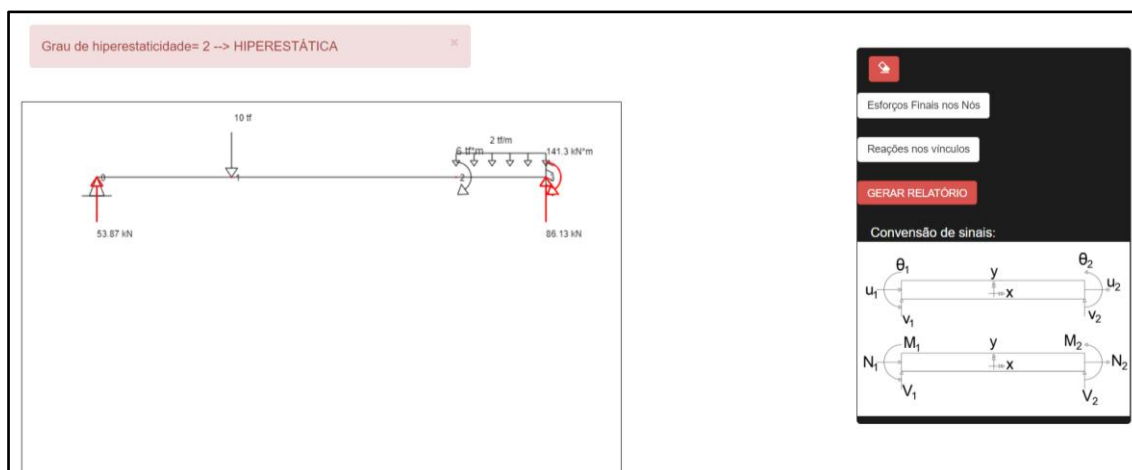


Figura 5: Resultados das reações de Apoio do exemplo apresentado na Figura 4. Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que os esforços finais apareçam na tela dos resultados é preciso clicar no botão “Esforços Finais nos Nós”, e irá aparecer o seguinte alerta (Figura 6):

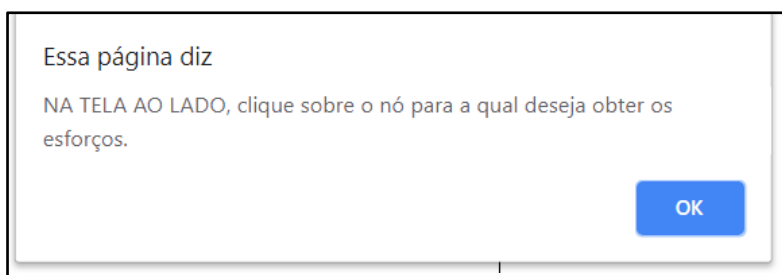


Figura 6: Alerta ao clicar no botão "Esforços Finais nos nós". Fonte: Elaborado pelo autor.

Depois, é preciso clicar “ok” e escolher o nó que se deseja saber os esforços, o que é possível visualizar na Figura 7:

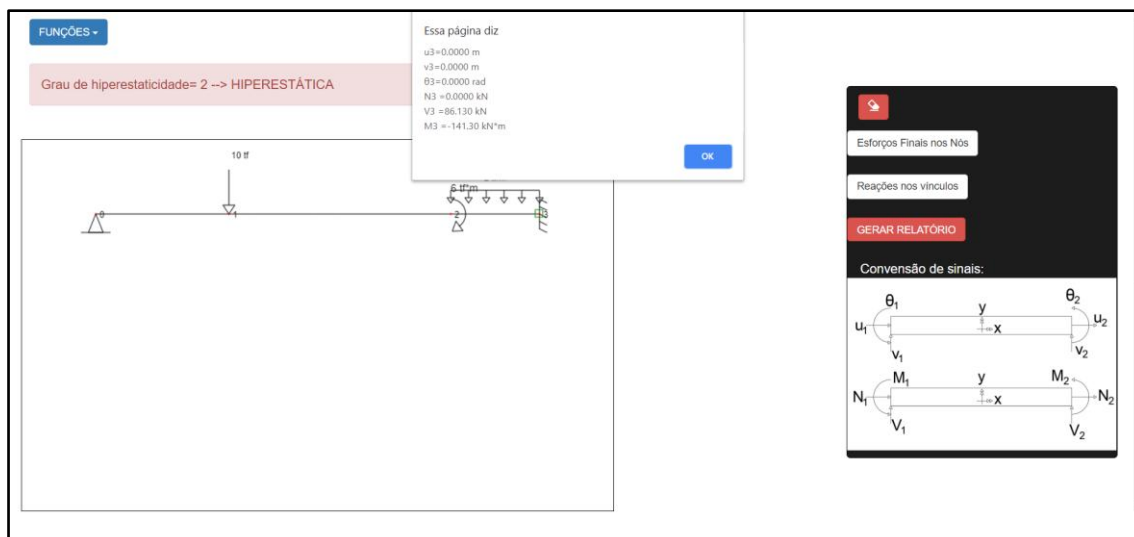
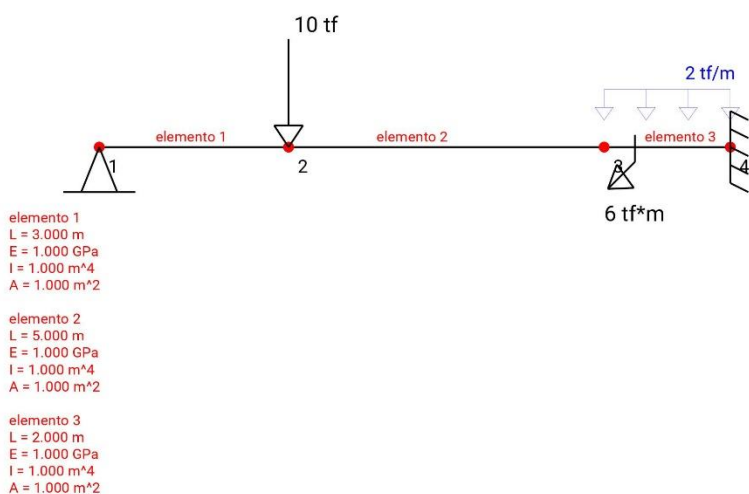


Figura 7: Resultado dos esforços no nó 3, para o exemplo da Figura 4. Fonte: Elaborado pelo autor.

Para gerar o Relatório PDF (Figura 8) com a resolução detalhada e a teoria envolvida, objetivo principal deste trabalho, é necessário clicar no botão “GERAR RELATÓRIO”.

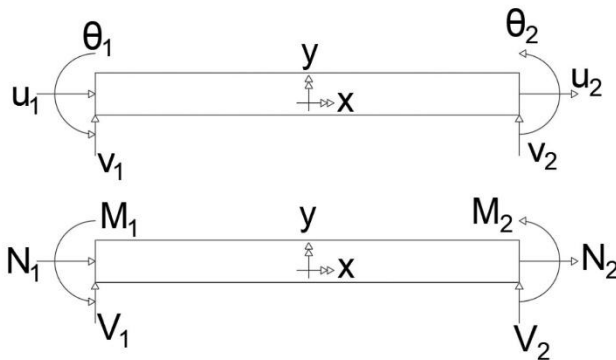
"A NUMERAÇÃO DE NÓS APLICADA NA FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS AQUI DESENVOLVIDA DEVE INICIAR EM 1. PORÉM, O CAD/IFESTRUT TEM O ZERO COMO NÓ INICIAL. SENDO ASSIM, A ESTRUTURA A SER CALCULADA (FIGURA A SEGUIR), MOSTRA OS NÓS JÁ RENUMERADOS, COMEÇANDO DO 1. O MESMO VALE PARA A NUMERAÇÃO DAS BARRAS (ELEMENTOS)."

A estrutura a calcular é a seguinte:



A CONVENÇÃO DE SINAIS UTILIZADA PELO MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS É DIFERENTE DA ADOTADA PELO IFESTRUT, PORTANTO SEGUE ABAIXO A CONVENÇÃO DE SINAIS ADOTADA PELO MÉTODO AQUI DESCRITO:

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor



Segundo Assan (2003), o Método dos elementos finitos (MEF) mais usado é o baseado no Método de Rayleigh-Ritz e prevê a divisão do domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas ELEMENTOS FINITOS.

Essa divisão em elementos é chamada malha de elementos, os pontos de intersecção da malha formam os nós.

A partir da divisão dos elementos, monta-se as matrizes de rigidez dos elementos e o seu respectivo vetor de cargas distribuídas, para posteriormente juntá-las na matriz global, para cálculo dos deslocamentos finais da estrutura.

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO FINITO GENÉRICO:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} \\ -\frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{l} \end{bmatrix}$$

VETOR DE CARGAS DISTRIBUÍDAS DE UM ELEMENTO FINITO GENÉRICO:

$$r_d = \begin{bmatrix} \frac{q_x \cdot l}{2} \\ \frac{q_y \cdot l}{2} \\ \frac{q_y \cdot l^2}{12} \\ \frac{q_x \cdot l}{2} \\ \frac{q_y \cdot l}{2} \\ -\frac{q_y \cdot l^2}{12} \end{bmatrix}$$

Como existe elemento inclinado, em relação ao eixo x global, é preciso transformar as coordenadas globais em coordenadas locais (onde o elemento passará a ter inclinação nula em relação ao eixo x). Para essa transformação é preciso resolver a expressão abaixo:

$$kR = (\text{Transposta de } T) \cdot k \cdot T$$

Onde:

kR: a matriz de rigidez transformadas em coordenadas locais

T: vetor transformação genérico, mostrado abaixo:

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abaixo a Resolução

Elemento1- Nós(1 - 2)

Módulo de Elasticidade (E): 1.00000000GPa= 1000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.00000000m⁴

Área da seção (A): 1.00000m²

Comprimento da Barra (l): 3.000 m

Carregamento distribuído horizontal ao elemento (qx): 0.000 kN/m

Carregamento distribuído vertical ao elemento (qy): 0.000 kN/m

Segue a Matriz de rigidez do elemento (k1,2): unidades em kN e m

3.3333e+5	0.0000	0.0000	-3.3333e+5	0.0000	0.0000
0.0000	4.4444e+5	6.6667e+5	0.0000	-4.4444e+5	6.6667e+5
0.0000	6.6667e+5	1.3333e+6	0.0000	-6.6667e+5	6.6667e+5
-3.3333e+5	0.0000	0.0000	3.3333e+5	0.0000	0.0000
0.0000	-4.4444e+5	-6.6667e+5	0.0000	4.4444e+5	-6.6667e+5
0.0000	6.6667e+5	6.6667e+5	0.0000	-6.6667e+5	1.3333e+6

Como se trata de um elemento inclinado é preciso realizar a transformação de coordenadas como explicado anteriormente.

Ângulo da barra: 0.0000

Obs: o ângulo sempre será em relação a rotação da barra pelo nó da esquerda.

Abaixo se encontra o vetor transformação (T1,2)

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Para encontrar a matriz de rigidez rotacionada é preciso da transposta de T, sendo mostrada abaixo:
Transposta de T1,2

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Matriz de rigidez do elemento com as coordenadas locais transformadas em coordenadas globais (k1, 2):
unidades em kN e m

3.3333e+5	0.0000	0.0000	-3.3333e+5	0.0000	0.0000
0.0000	4.4444e+5	6.6667e+5	0.0000	-4.4444e+5	6.6667e+5
0.0000	6.6667e+5	1.3333e+6	0.0000	-6.6667e+5	6.6667e+5
-3.3333e+5	0.0000	0.0000	3.3333e+5	0.0000	0.0000
0.0000	-4.4444e+5	-6.6667e+5	0.0000	4.4444e+5	-6.6667e+5
0.0000	6.6667e+5	6.6667e+5	0.0000	-6.6667e+5	1.3333e+6

Vetor de cargas nodais distribuídas do elemento (rd1,2): unidades em kN e m

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

Elemento2- Nós(2 - 3)

Módulo de Elasticidade (E): 1.00000000GPa= 1000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.00000000m⁴

Área da seção (A): 1.00000m²

Comprimento da Barra (l): 5.000 m

Carregamento distribuído horizontal ao elemento (qx): 0.000 kN/m

Carregamento distribuído vertical ao elemento (qy): 0.000 kN/m

Segue a Matriz de rigidez do elemento (k2,3): unidades em kN e m

2.0000e+5	0.0000	0.0000	-2.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	96000	2.4000e+5	0.0000	-96000	2.4000e+5
0.0000	2.4000e+5	8.0000e+5	0.0000	-2.4000e+5	4.0000e+5
-2.0000e+5	0.0000	0.0000	2.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	-96000	-2.4000e+5	0.0000	96000	-2.4000e+5
0.0000	2.4000e+5	4.0000e+5	0.0000	-2.4000e+5	8.0000e+5

Como se trata de um elemento inclinado é preciso realizar a transformação de coordenadas como explicado anteriormente.

Ângulo da barra: 0.0000

Obs: o ângulo sempre será em relação a rotação da barra pelo nó da esquerda.

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

Abaixo se encontra o vetor transformação (T2,3)

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Para encontrar a matriz de rigidez rotacionada é preciso da transposta de T, sendo mostrada abaixo:
Transposta de T2,3

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Matriz de rigidez do elemento com as coordenadas locais transformadas em coordenadas globais (k2, 3):
unidades em kN e m

2.0000e+5	0.0000	0.0000	-2.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	96000	2.4000e+5	0.0000	-96000	2.4000e+5
0.0000	2.4000e+5	8.0000e+5	0.0000	-2.4000e+5	4.0000e+5
-2.0000e+5	0.0000	0.0000	2.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	-96000	-2.4000e+5	0.0000	96000	-2.4000e+5
0.0000	2.4000e+5	4.0000e+5	0.0000	-2.4000e+5	8.0000e+5

Vetor de cargas nodais distribuidas do elemento (rd2,3): unidades em kN e m

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000

Elemento3- Nós(3 - 4)

Módulo de Elasticidade (E): 1.000000000GPa= 1000000.000kN/m²

Momento de Inércia (I): 1.000000000m⁴

Área da seção (A): 1.000000m²

Comprimento da Barra (l): 2.000 m

Carga distribuida vertical ao elemento (qy): -2.000tf/m= -20.000 kN/m

Carga distribuida horizontal ao elemento (qx): 0.000 kN/m

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

Segue a Matriz de rigidez do elemento (k3,4): unidades em kN e m

5.0000e+5	0.0000	0.0000	-5.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	1.5000e+6	1.5000e+6	0.0000	-1.5000e+6	1.5000e+6
0.0000	1.5000e+6	2.0000e+6	0.0000	-1.5000e+6	1.0000e+6
-5.0000e+5	0.0000	0.0000	5.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	-1.5000e+6	-1.5000e+6	0.0000	1.5000e+6	-1.5000e+6
0.0000	1.5000e+6	1.0000e+6	0.0000	-1.5000e+6	2.0000e+6

Como se trata de um elemento inclinado é preciso realizar a transformação de coordenadas como explicado anteriormente.

Ângulo da barra: 0.0000

Obs: o ângulo sempre será em relação a rotação da barra pelo nó da esquerda.

Abaixo se encontra o vetor transformação (T3,4)

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Para encontrar a matriz de rigidez rotacionada é preciso da transposta de T, sendo mostrada abaixo:

Transposta de T3,4

1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Matriz de rigidez do elemento com as coordenadas locais transformadas em coordenadas globais (k3, 4): unidades em kN e m

5.0000e+5	0.0000	0.0000	-5.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	1.5000e+6	1.5000e+6	0.0000	-1.5000e+6	1.5000e+6
0.0000	1.5000e+6	2.0000e+6	0.0000	-1.5000e+6	1.0000e+6
-5.0000e+5	0.0000	0.0000	5.0000e+5	0.0000	0.0000
0.0000	-1.5000e+6	-1.5000e+6	0.0000	1.5000e+6	-1.5000e+6
0.0000	1.5000e+6	1.0000e+6	0.0000	-1.5000e+6	2.0000e+6

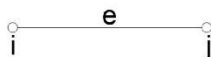
Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

Vetor de cargas nodais distribuidas do elemento (rd3,4): unidades em kN e m

0.0000
-20.000
-6.6667
0.0000
-20.000
6.6667

Para a montagem da matriz global é necessário que siga o esquema que será apresentado abaixo, uma vez que nem sempre a estrutura apresentará barras com nós sequências.

Segundo Assan (2003), para cada barra "e" de nós i-j, como ilustrado a seguir:



O elemento da matriz de rigidez local na matriz de rigidez global da estrutura será dada por:

$$\begin{bmatrix} a[3i-2; 3i-2] & a[3i-2; 3i-1] & a[3i-2; 3i] & a[3i-2; 3j-2] & a[3i-2; 3j-1] & a[3i-2; 3j] \\ a[3i-1; 3i-2] & a[3i-1; 3i-1] & a[3i-1; 3i] & a[3i-1; 3j-2] & a[3i-1; 3j-1] & a[3i-1; 3j] \\ a[3i; 3i-2] & a[3i; 3i-1] & a[3i; 3i] & a[3i; 3j-2] & a[3i; 3j-1] & a[3i; 3j] \\ a[3j-2; 3i-2] & a[3j-2; 3i-1] & a[3j-2; 3i] & a[3j-2; 3j-2] & a[3j-2; 3j-1] & a[3j-2; 3j] \\ a[3j-1; 3i-2] & a[3j-1; 3i-1] & a[3j-1; 3i] & a[3j-1; 3j-2] & a[3j-1; 3j-1] & a[3j-1; 3j] \\ a[3j; 3i-2] & a[3j; 3i-1] & a[3j; 3i] & a[3j; 3j-2] & a[3j; 3j-1] & a[3j; 3j] \end{bmatrix}$$

OBS.1: Os elementos da matriz global que não forem preenchidos, deverão ser zeros.

Para a montagem do vetor global de cargas nodais é necessário que siga o esquema que será apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} b'[3i-2] \\ b'[3i-1] \\ b'[3i] \\ b'[3j-2] \\ b'[3j-1] \\ b'[3j] \end{bmatrix}$$

As cargas pontuais e momentos concentrados por estarem aplicados diretamente no nó apresentam somente o vetor global de cargas, como o exemplo genérico abaixo:

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ Mc_i \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ Mc_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Abaixo o vetor global de ações nos nós nas unidades do sistema internacional(SI) kN e m:

0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
-100.00
0.0000
0.0000
0.0000
-60.000
0.0000
0.0000
0.0000

Montadas a matriz de rigidez global (kg) da estrutura e o vetor de cargas nodais global (rdg) da estrutura, serão obtidos os deslocamentos nodais em relação aos eixos GLOBAIS. Como a matriz global e o vetor global de cargas nodais são grandes na maioria das vezes, o sistema não será apresentada neste relatório. No entanto se encontra no arquivo global.dxf, que foi gerado juntamente com este Relatório PDF.

Para resolução do sistema é necessário excluir algumas linhas e colunas. Estas serão zeradas e depois excluídas de acordo com as equações de contorno dos nós. Ao zerar uma linha deve zerar a coluna de mesmo número.

***Condições de Contorno:

Em caso de apoio móvel deve se zerar a linha que representa do deslocamento em y.

Em caso de apoio fixo deve se zerar as linhas que representa do deslocamento em x e em y.

Em caso de engaste deve se zerar as linhas que representa do deslocamento em x, em y e o giro.

Abaixo segue as colunas e linhas que devem ser zeradas, para posteriormente serem excluídas da matriz.

No nó 1 possui um apoio fixo, portanto é necessário que as linhas e colunas 1 e 2 sejam zeradas.

No nó 4 possui um engaste, portanto é necessário que as linhas e colunas 10, 11 e 12 sejam zeradas.

Excluídos as linhas e colunas, basta resolver o sistema restante. O sistema pode ser resolvido, por exemplo, por Gauss, que pode ser estudado em <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>. Para tanto, utilize o arquivo txt (final.txt) gerado juntamente com este relatório, que

Figura 9: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

pode ser lido pelo referido programa.

Resolvendo o sistema acima, encontram-se os seguintes valores:

x1=-0.00033683
x2=0.00000
x3=-0.00076808
x4=-0.000094418
x5=0.00000
x6=-0.00018109
x7=0.00013701

Para obter os esforços finais é necessário voltar nos vetores locais dos elementos. Segue o esquema genérico dos resultados:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} = k * \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} - rd$$

Abaixo os resultados de cada elemento:

Elemento1- Nós(1 - 2)

N1 (kN)	= k1, 2 *	0.0000	- rd1, 2
V1 (kN)		0.0000	
M1 (kN*m)		-0.00033683	
N2 (kN)		0.0000	
V2 (kN)		-0.00076808	
M2 (kN*m)		-0.000094418	

Resolvendo o sistema acima temos:

N1 (kN)	=	0.0000
V1 (kN)		53.870
M1 (kN*m)		0.0000
N2 (kN)		0.0000
V2 (kN)		-53.870
M2 (kN*m)		161.61

Como existe elemento inclinado, em relação ao eixo x global, é preciso voltar as coordenadas locais em coordenadas globais para que ache os esforços reais da estrutura. Para isso é preciso multiplicar o vetor dos esforços pelo vetor transformação. Segue a resolução:

N1 (kN)	0.0000	0.0000
V1 (kN)	53.870	53.870

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

M1 (kN*m)	= T1, 2*	0.0000	=	0.0000
N2 (kN)		0.0000		0.0000
V2 (kN)		-53.870		53.870
M2 (kN*m)		161.61		161.61

Elemento2- Nós(2 - 3)

N2 (kN)	= k2, 3 *	0.0000	- rd2, 3
V2 (kN)		-0.00076808	
M2 (kN*m)		-0.000094418	
N3 (kN)		0.0000	
V3 (kN)		-0.00018109	
M3 (kN*m)		0.00013701	

Resolvendo o sistema acima temos:

N2 (kN)	=	0.0000
V2 (kN)		-46.130
M2 (kN*m)		-161.61
N3 (kN)		0.0000
V3 (kN)		46.130
M3 (kN*m)		-69.040

Como existe elemento inclinado, em relação ao eixo x global, é preciso voltar as coordenadas locais em coordenadas globais para que ache os esforços reais da estrutura. Para isso é preciso multiplicar o vetor dos esforços pelo vetor transformação. Segue a resolução:

N2 (kN)	= T2, 3*	0.0000	=	0.0000
V2 (kN)		-46.130		-46.130
M2 (kN*m)		-161.61		-161.61
N3 (kN)		0.0000		0.0000
V3 (kN)		46.130		-46.130
M3 (kN*m)		-69.040		-69.040

Elemento3- Nós(3 - 4)

N3 (kN)	= k3, 4 *	0.0000	- rd3, 4
V3 (kN)		-0.00018109	
M3 (kN*m)		0.00013701	
N4 (kN)		0.0000	
V4 (kN)		0.0000	
M4 (kN*m)		0.0000	

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Continuação. Fonte: Elaborado pelo autor

Resolvendo o sistema acima temos:

N3 (kN)		0.0000
V3 (kN)		-46.130
M3 (kN*m)		9.0400
N4 (kN)	=	0.0000
V4 (kN)		86.130
M4 (kN*m)		-141.30

Como existe elemento inclinado, em relação ao eixo x global, é preciso voltar as coordenadas locais em coordenadas globais para que ache os esforços reais da estrutura. Para isso é preciso multiplicar o vetor dos esforços pelo vetor transformação. Segue a resolução:

N3 (kN)		0.0000		0.0000
V3 (kN)		-46.130		-46.130
M3 (kN*m)		9.0400		9.0400
N4 (kN)	= T3, 4*	0.0000	=	0.0000
V4 (kN)		86.130		-86.130
M4 (kN*m)		-141.30		-141.30

Os valores das reações de apoio podem ser tiradas dos vetores de esforços no eixo local. Segue os valores:

Reações no apoio fixo do nó 1:

Reação Horizontal: 0.0000 kN

Reação Vertical: 53.870 kN

Reações no engaste do nó 4:

Reação Horizontal: 0.0000 kN

Reação Vertical: 86.130 kN

Momento: -141.30 kN*m

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAN, Aloisio Ernesto. Método dos Elementos Finitos: primeiros passos. 2° Ed. Campinas. UNICAMP, 2003.

Figura 8: Relatório gerado a partir do exemplo da Figura 4 – Conclusão. Fonte: Elaborado pelo autor

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos: primeiros passos**. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 2003.

FTOOL. Ftool para Windows, versão 4.00. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2017. Disponível em <<https://www.alis-sol.com.br/Ftool/>>. Acesso em: 15jun. 2018.

PDFMAKE. **PLAYGROUND**. Disponível em <<http://pdfmake.org/playground.html>>. Acesso em: 30 abr. 2018.

W3SCHOOLS.COM. **HTML5 tutorial**. Disponível em <<https://www.w3schools.com/html/default.asp/>>. Acesso em: 30 abr. 2018.

Assinatura do orientador:

Assinatura do bolsista:

